

计算机图形图像理论基础题

Collected and sorted out by Linst <root@sitao.org>

1. 使用 DDA 算法绘制端点为 (20, 20) 和 (28, 26) 的线段。

$\Delta x = 8, \Delta y = 6, m = 0.75$	
$x_0 = 20, y_0 = 20$	$x_5 = 25, y_5 = y_4 + m = 23.75 \approx 24$
$x_1 = 21, y_1 = y_0 + m = 20.75 \approx 21$	$x_6 = 26, y_6 = y_5 + m = 24.5 \approx 25$
$x_2 = 22, y_2 = y_1 + m = 21.5 \approx 22$	$x_7 = 27, y_7 = y_6 + m = 25.25 \approx 25$
$x_3 = 23, y_3 = y_2 + m = 22.25 \approx 22$	$x_8 = 28, y_8 = y_7 + m = 26$
$x_4 = 24, y_4 = y_3 + m = 23$	

6. 已知旋转角为 θ ，旋转中心为 (x_0, y_0) ，请构造该旋转变换的变换矩阵。

4.3.4 通用基准点旋转

1. 问题
如图 4-13 所示，已知旋转角为 θ ，基准点位置为 $P_r(x_r, y_r)$ ，请构造该旋转变换的变换矩阵。

2. 变换矩阵的构造

(1) 使基准点与原点重合： $T_1 = T(-x_r, -y_r)$
 $P_1 = T_1 \times P_0$

(2) 绕原点旋转： $R = R(\theta)$
 $P_2 = R \times P_1$

(3) 使基准点回到原处： $T_2 = T(x_r, y_r), P_3 = T_2 \times P_2$ 。

由 $P_3 = M \times P_0 = T_2 \times R \times T_1 \times P_0$ 可知，完整变换为

$$M = T_2 R T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_r(1 - \cos \theta) + y_r \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -x_r \sin \theta + y_r(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 4-13 通用基准点旋转

7. 已知缩放系数为 s_x 和 s_y ，缩放中心为 (x_0, y_0) ，请构造该缩放变换的变换矩阵。

1. 问题

已知缩放系数为 s_x 和 s_y , 固定点缩放中心位置为 $P_f(x_f, y_f)$, 请构造该缩放变换的变换矩阵。

2. 变换矩阵的构造

(1) 使固定点与原点重合: $T_1 = T(-x_f, -y_f)$ 。

(2) 以原点为固定点缩放: $S = S(s_x, s_y)$ 。

(3) 使固定点回到原处: $T_2 = T(x_f, y_f)$ 。

完整变换为

$$M = T_2 S T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & x_f(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. 已知缩放系数为 0.6 和 0.8, 缩放中心为 (1, 1), 请构造该二维缩放变换的变换矩阵。

同上

9. 已知旋转角为 θ , 各向缩放系数均为 s , 旋转中心和缩放中心均为 (x_0, y_0) , 请构造该带缩放的旋转变换的变换矩阵。

① 使旋转中心和固定点与原点重合: $T_1 = T(-x_0, -y_0)$

② 绕原点旋转: $R = R(\theta)$

③ 以原点为固定点缩放: $S = S(s, s)$ 。

④ 使旋转中心和固定点回到原处: $T_2 = T(x_0, y_0)$

完整变换:

$$\begin{aligned} M &= T_2 S R T_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & x_0(1-s \cos \theta) + y_0 s \sin \theta \\ s \sin \theta & s \cos \theta & -x_0 s \sin \theta + y_0(1-s \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10. 已知旋转角为 60 度, 旋转中心为 (1, 2), 请构造该旋转变换的变换矩阵 M , 结果至少保留 3 位小数 (也可使用无理数)。

(1) 使基准点与原点重合: $T_1 = T(-1, -2)$

(2) 绕原点旋转: $R = R(60^\circ)$

(3) 使基准点回到原处: $T_2 = T(1, 2)$

完整变换

$$\begin{aligned} M = T_2 R T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 & 2.2321 \\ 0.866 & 0.5 & 0.1340 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. 已知 $P_0(3, 3)$ 和 $P_1(6, 7)$, 新坐标系统的原点位置定义在旧坐标系统的 P_0 处, 新的 y 轴为 P_0P_1 , 请构造完整的从旧坐标系统到新坐标系统的坐标变换矩阵。

【问题】 已知 $P_0(3, 3)$ 和 $P_1(6, 7)$, 新坐标系统的原点位置定义在旧坐标系的 P_0 处, 新坐标系的 y 轴为 P_0P_1 , 请构造从旧坐标系到新坐标系的坐标变换矩阵。

【解答】

(1) 使新原点与旧原点重合: $T = T(-3, -3)$ 。

(2) 使新 y 轴与旧 y 轴重合: R 。

因为 $v = P_0P_1 / |P_0P_1| = (0.6, 0.8)$, $u = (0.8, -0.6)$, 所以

$$R = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完整变换为

$$M = RT = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 & -4.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. 已知 $P_0(3, 3)$ 和 $P_1(6, 7)$, 新坐标系统的原点位置定义在旧坐标系统的 P_0 处, 新的 x 轴为 P_0P_1 , 请构造完整的从旧坐标系统到新坐标系统的坐标变换矩阵。

(1) 使新原点与旧原点重合: $T=T(-3, -3)$

(2) 使新坐标轴与旧坐标轴重合: R

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_0 P_1} / |\overrightarrow{P_0 P_1}| = (0.6, 0.8), \quad \vec{v} = (-0.8, 0.6)$$
$$R = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完整变换:

$$M = RT = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & -4.2 \\ -0.8 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. 已知新坐标系原点 $P(1, 2)$, 新 y 轴方向 $(0.8, 0.6)$ 。请构造该 2 维坐标系变换, 并写出变换矩阵。

① 使新原点与旧原点重合: $T = T(-1, -2)$ 。

② 使新 y 轴与旧 y 轴重合: R 。

因为 $\vec{v} = (0.8, 0.6)$, $\vec{u} = (0.6, -0.8)$, 所以

$$R = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完整变换:

$$M = RT = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. 已知窗口为 $(0, 0) \sim (10, 10)$, 视区为 $(1, 1) \sim (6, 6)$, 要求将窗口中位于 (x, y) 的点映像到视区中坐标为 (x', y') 的点, 请构造变换公式和变换矩阵。

3. 已知窗口为(0, 0)~(10, 10), 视区为(1, 1)~(6, 6), 要求将窗口中位于(x, y)的点映像到视区中坐标为(x', y')的点, 请构造变换公式和变换矩阵。

解:

为了使视区与窗口中的对象有同样的相对位置, 必须满足

$$\begin{cases} \frac{x_v - 1}{6 - 1} = \frac{x_w - 0}{10 - 0} \\ \frac{y_v - 1}{6 - 1} = \frac{y_w - 0}{10 - 0} \end{cases}$$

从而, 得到如下变换公式和变换矩阵

$$\begin{cases} x_v = 0.5x_w + 1 \\ y_v = 0.5y_w + 1 \end{cases}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. 已知裁剪窗口为(0, 0)~(10, 10), 要求将裁剪窗口中位于(x, y)的点映像到规范化正方形(坐标范围为[-1, 1])中坐标为(x', y')的点, 请构造变换公式和变换矩阵。

参考

7. 已知裁剪窗口为(0, 0)~(5, 5), 要求将裁剪窗口中位于(x, y)的点映像到规范化正方形(坐标范围为[-1, 1])中坐标为(x', y')的点, 请构造变换公式和变换矩阵。

解:

为了使规范化正方形与裁剪窗口中的对象有同样的相对位置, 必须满足

$$\begin{cases} \frac{x' - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x - 0}{5 - 0} \\ \frac{y' - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{y - 0}{5 - 0} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{5}x - 1 = 0.4x - 1 \\ y' = \frac{2}{5}y - 1 = 0.4y - 1 \end{cases}$$

从而得到变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & -1 \\ 0 & 0.4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. 已知屏幕视口为(0, 0)~(100, 100), 要求将规范化正方形(坐标范围为[-1, 1])中位于(x, y)的点映像到屏幕视口中坐标为(x', y')的点, 请构造变换公式和变换矩

阵。

参考

8、已知屏幕视口为(0, 0)~(200, 200)，要求将规范化正方形（坐标范围为[-1, 1]）中位于(x, y)的点映像到屏幕视口中坐标为(x', y')的点，请构造变换公式和变换矩阵。
解：

为了使规范化正方形与屏幕视口中的对象有同样的相对位置，必须满足

$$\begin{cases} \frac{x'-0}{200-0} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \\ \frac{y'-0}{200-0} = \frac{y-(-1)}{1-(-1)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = \frac{200}{2}(x+1) + 0 = 100x + 100 \\ y' = \frac{200}{2}(y+1) + 0 = 100y + 100 \end{cases}$$

从而得到变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. 已知某线段的两个端点坐标分别是(-5, 10)和(10, -2)，裁剪窗口为(0, 0)~(10, 10)，请使用Cohen-Sutherland算法计算出裁剪以后剩余的线段。

课本 51 页

参考

15. 已知线段 P_1P_2 的两个端点坐标为 $P_1(-5,10)$ 和 $P_2(10,-5)$ ，裁剪窗口为 $(0,0)\sim(10,10)$ ，请使用 Cohen-Sutherland 线段裁剪算法计算出裁剪以后剩余的线段。

解：

左边界： $x=0$ ，右边界： $x=10$ ，下边界： $y=0$ ，上边界： $y=10$ 。

P_1 区域码： 0001， P_2 区域码： 0100。两端点区域码的与为 0000。

P_1 是一外端点，位于窗口左边， P_1P_2 与左边界 $x=0$ 求交

$$m=(-5-10)/(10+5)=-1$$

$$y=y_1+m(c-x_1)=10-(0+5)=5$$

得交点 $P_1'=(0,5)$ 。舍弃 P_1P_1' ，保留 $P_1'P_2$ 。

P_1' 区域码： 0000， P_2 区域码： 0100。两端点区域码的与为 0000。

P_2 是一外端点，位于窗口的下边， $P_1'P_2$ 与下边界 $y=0$ 求交

$$1/m=-1, x=x_1+(c-y_1)/m=-5-(0-10)=5$$

得交点 $P_2'=(5,0)$ 。舍弃 $P_2'P_2$ ，保留 $P_1'P_2'$ 。

P_1' 区域码： 0000， P_2' 区域码： 0000。所以裁剪后剩余线段为 $P_1'P_2'$ ，端点坐标分别为： $P_1'=(0,5)$ ，

$P_2'=(5,0)$ 。

18. 已知三个顶点 $(1, 2, 1)$ 、 $(3, 4, 2)$ 和 $(2, 5, 3)$ ，从里向外以右手系形成逆时针方向。请构造出这三个顶点所确定的平面方程。

$\overrightarrow{V_1V_2}=(2,2,1)$ ， $\overrightarrow{V_1V_3}=(1,3,2)$ ， $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1V_2}\times\overrightarrow{V_1V_3}=(1,-3,4)$ ，设平面方程为： $\overrightarrow{N}\cdot P+D=0$ ，即 $x-3y+4z+D=0$ 。

将 V_1 代入该方程，有 $1-3\times 2+4+D=0$ ，从而 $D=1$ 。所以该平面的方程为 $x-3y+4z+1=0$ 。

19. 已知三个方向的缩放系数分别是 1、2 和 3，缩放中心为 $(1, 2, 3)$ ，请构造该缩放变换的变换矩阵。

4. 已知缩放系数为 s_x 、 s_y 和 s_z ，固定点位置为 (x_f, y_f, z_f) ，请构造该缩放变换的变换矩阵。

解：

① 使固定点与原点重合： $T_1=T(-x_f, -y_f, -z_f)$ 。

② 相对于原点缩放： $S=S(s_x, s_y, s_z)$ 。

③ 使固定点回到原来位置： $T_2=T(x_f, y_f, z_f)$ 。

完整变换：

$$M=T_2\times S\times T_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & 0 & y_f \\ 0 & 0 & 1 & z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 & -z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

20. 已知旋转轴为 AB，其中 $A=(0, 0, 0)$ ， $B=(3, 4, 0)$ ，请构造绕 AB 旋转 90 度的旋转变换。

(1) 旋转物体使旋转轴与某一坐标轴(通常取 z 轴)重合: R

将 $\overline{AB}=(3,4,0)$ 单位化, 得 $\overline{n}=\overline{AB}/|\overline{AB}|=(0.6,0.8,0)$

令 $\overline{u}_x=(1,0,0)$, $\overline{v}=\overline{n}\times\overline{u}_x/|\overline{n}\times\overline{u}_x|=(0.6,0.8,0)\times(1,0,0)/|(0.6,0.8,0)\times(1,0,0)|=(0,0,-1)$

$\overline{u}=\overline{v}\times\overline{n}=(0,0,-1)\times(0.6,0.8,0)=(0.8,-0.6,0)$, 则

$$R=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 绕坐标轴 (z 轴) 完成指定的旋转: $R_z(\theta)$

(3) 使旋转轴回到原来的方向: R^{-1}

完整变换:

$$M=R^{-1}\times R_z(90^\circ)\times R=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0.8 & 0 \\ 0.48 & 0.64 & -1 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. 已知: $P_0(3, 3, 5)$ 和 $P_1(6, 7, 5)$, 旋转轴为 P_0P_1 , 旋转角为 θ 。请使用齐次坐标写出该旋转变换的变换矩阵和变换方程。

(1) 使 P_0 与原点重合: $T_1=T(-3,-3,-5)$

(2) 使 P_0P_1 与 z 轴重合: R_1

$\overline{N}=\overline{P_0P_1}=(3,4,0)$, $\overline{V}=\overline{N}\times(1,0,0)=(0,0,-4)$, $\overline{U}=\overline{V}\times\overline{N}=(16,-12,0)$ 。

将 \overline{U} , \overline{V} , \overline{N} 单位化, 得 $\overline{u}=\overline{U}/|\overline{U}|=(0.8,-0.6,0)$, $\overline{v}=\overline{V}/|\overline{V}|=(0,0,-1)$, $\overline{n}=\overline{N}/|\overline{N}|=(0.6,0.8,0)$ 。由此可得

$$R_1=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 绕 z 轴旋转: $R=R(\theta)$

(4) 使 P_0P_1 方向复原: $R_2=R_1^{-1}$

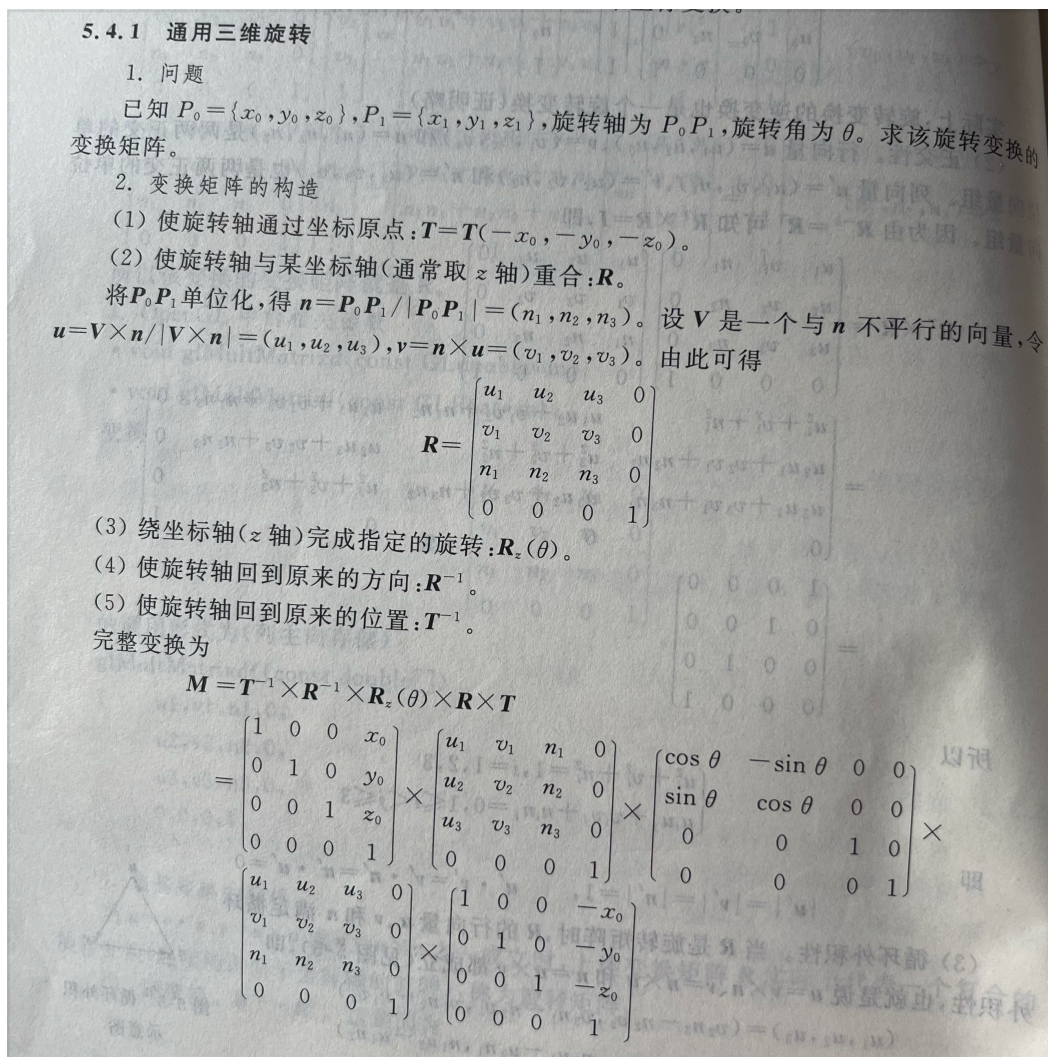
(5) 使 P_0P_1 回到原处: $T_2=T(3,3,5)$

完整变换

$$\begin{aligned}
 M &= T_2 \times R_2 \times R \times R_1 \times T_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.64\cos\theta+0.36 & 0.48(1-\cos\theta) & 0.8\sin\theta & 0.48(1-\cos\theta)-4\sin\theta \\ 0.48(1-\cos\theta) & 0.36\cos\theta+0.64 & -0.6\sin\theta & -0.36(1-\cos\theta)+3\sin\theta \\ -0.8\sin\theta & 0.6\sin\theta & \cos\theta & 5(1-\cos\theta)+0.6\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

22. 已知旋转角为 60 度，旋转轴为 P0P1，请构造该三维旋转变换的变换矩阵 M，结果至少保留 3 位小数，其中 P0=(1, 2, 0)，P1=(1, 2, 1)。

同上



23. 已知：观察参考点为 (1, 1, 1)，观察面法向量为 (4, 3, 0)，观察向上向量为 (-3, 4, 0)。请构造从世界坐标到观察坐标的变换，写出变换矩阵。

(1) 使观察参考点与世界坐标系原点重合: $T=T(-1,-1,-1)$

(2) 使观察坐标系与世界坐标系重合: R

观察坐标系 z 轴方向: $\vec{N}=(4,3,0)$

观察坐标系 x 轴方向: $\vec{U}=\vec{V}\times\vec{N}=(0,0,-25)$

观察坐标系 y 轴方向: $\vec{V}=\vec{N}\times\vec{U}=(-75,100,0)$

将 \vec{U} 、 \vec{V} 、 \vec{N} 单位化:

$$\vec{u}=\vec{U}/|\vec{U}|=(0,0,-1), \quad \vec{v}=\vec{V}/|\vec{V}|=(-0.6,0.8,0), \quad \vec{n}=\vec{N}/|\vec{N}|=(0.8,0.6,0)$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完整变换:

$$M=RT=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & -0.2 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & -1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. 已知投影向量为 $(3, 4, 1)$, 投影面为 $x y$ 平面, 请根据定义计算该平行投影的变换矩阵。

由 $(x' - x, y' - y, 0 - z) = u(3, 4, 1)$ 可得

$$\begin{cases} x' = x + 3u \\ y' = y + 4u \\ 0 = z + u \end{cases}$$

由 $0 = z + u$ 得 $u = -z$ 。

于是得到该平行影变换的方程为

$$\begin{cases} x' = x - 3z \\ y' = y - 4z \end{cases}$$

原始 z 坐标作为深度信息保存。

从而，变换矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. 已知观察面为 $z = -4$ ，投影向量为 $(1, 1, 1)$ ，求经过平行投影变换后点 $(1, 2, 3)$ 的坐标。

由 $(x' - 1, y' - 2, -4 - 3) = u(1, 1, 1)$ 可得

$$\begin{cases} x' = 1 + u \\ y' = 2 + u \\ -4 = 3 + u \end{cases}$$

由 $-4 = 3 + u$ 得 $u = -7$ 。

于是得到

$$\begin{cases} x' = 1 - 7 = -6 \\ y' = 2 - 7 = -5 \end{cases}$$

所以经过平行投影变换后点 $P(1, 2, 3)$ 的坐标为 $(-6, -5, 3)$ (答 $(-6, -5)$ 也可以)。

26. 已知投影中心为原点，投影面为 $z = -1$ ，请根据定义计算该透视投影的变换矩阵。

参考

6、已知投影中心为原点，投影面为 $z = -5$ ，请根据定义计算该透视投影的变换矩阵。

解：

由 $(x' - x, y' - y, -5 - z) = u(0 - x, 0 - y, 0 - z)$ 可得

$$\begin{cases} x' = x - xu \\ y' = y - yu \\ -5 = z - zu \end{cases}$$

由 $-5 = z - zu$ 可得 $u = (z + 5) / z$ 。

于是得到透视变换方程

$$\begin{cases} x' = x - \frac{z+5}{z}x = -\frac{5}{z}x \\ y' = y - \frac{z+5}{z}y = -\frac{5}{z}y \end{cases}$$

选取 $h = -z$ ，可得使用齐次坐标的变换方程为

$$\begin{cases} x_h = x' \cdot h = 5x \\ y_h = y' \cdot h = 5y \\ z_h = z' \cdot h = 5z \\ h = -z \end{cases}$$

由该变换方程可得透视变换的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

27. 求经过透视投影变换后点 $(1, 2, 3)$ 的坐标。已知：观察面为 $z = -1$ ，投影中心为 $(0, 0, 0)$ 。

参考

5、求经过透视投影变换后点 $P(1,2,3)$ 的坐标。已知：观察面为 $z=-4$ ，投影中心为 $(0,0,0)$ 。

解：

由 $(x'-1, y'-2, -4-3) = u(0-1, 0-2, 0-3)$ 可得

$$\begin{cases} x' = 1 - u \\ y' = 2 - 2u \\ -7 = -3u \end{cases}$$

由 $-7 = -3u$ 可得 $u = 7/3$ 。

于是得到

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} \\ y' = 2 - \frac{7}{3} \times 2 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

所以经过透视投影变换后点 $P(1,2,3)$ 的坐标为 $(-4/3, -8/3)$ （答 $(-4/3, -8/3, -4)$ 或 $(-4/3, -8/3, 3)$ 也可以）。

43. 请计算对下列实数矩阵进行傅立叶正变换后的变换结果（不缩放结果）。

1	7	4	0
9	4	8	8

课本 203、204 页

图中部分答案有误，以课本的答案为准

【解答】 $\omega_x = e^{-2\pi i/4} = -i, \omega_y = e^{-2\pi i/2} = -1$

$$\begin{aligned} F(0,0) &= f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + \\ &\quad f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) \\ &= 1 + 7 + 4 + 0 + 9 + 4 + 8 + 8 \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1,0) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x + f(2,0)\omega_x^2 + f(3,0)\omega_x^3 + \\ &\quad f(0,1) + f(1,1)\omega_x + f(2,1)\omega_x^2 + f(3,1)\omega_x^3 \\ &= 1 + 7(-i) + 4(-i)^2 + 0(-i)^3 + 9 + 4(-i) + 8(-i)^2 + 8(-i)^3 \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(2,0) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x^2 + f(2,0)\omega_x^4 + f(3,0)\omega_x^6 + \\
&\quad f(0,1) + f(1,1)\omega_x^2 + f(2,1)\omega_x^4 + f(3,1)\omega_x^6 \\
&= 1 + 7(-i)^2 + 4(-i)^4 + 0(-i)^6 + 9 + 4(-i)^2 + 8(-i)^4 + 8(-i)^6 \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(3,0) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x^3 + f(2,0)\omega_x^6 + f(3,0)\omega_x^9 + \\
&\quad f(0,1) + f(1,1)\omega_x^3 + f(2,1)\omega_x^6 + f(3,1)\omega_x^9 \\
&= 1 + 7(-i)^3 + 4(-i)^6 + 0(-i)^9 + 9 + 4(-i)^3 + 8(-i)^6 + 8(-i)^9 \\
&= -2 + 3i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(0,1) &= f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + \\
&\quad f(0,1)\omega_y + f(1,1)\omega_y + f(2,1)\omega_y + f(3,1)\omega_y \\
&= 1 + 7 + 4 + 0 - 9 - 4 - 8 - 8 \\
&= -17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(1,1) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x + f(2,0)\omega_x^2 + f(3,0)\omega_x^3 + \\
&\quad f(0,1)\omega_y + f(1,1)\omega_x\omega_y + f(2,1)\omega_x^2\omega_y + f(3,1)\omega_x^3\omega_y \\
&= 1 + 7(-i) + 4(-i)^2 + 0(-i)^3 - 9 - 4(-i) - 8(-i)^2 - 8(-i)^3 \\
&= -4 - 11i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(2,1) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x^2 + f(2,0)\omega_x^4 + f(3,0)\omega_x^6 + \\
&\quad f(0,1)\omega_y + f(1,1)\omega_x^2\omega_y + f(2,1)\omega_x^4\omega_y + f(3,1)\omega_x^6\omega_y \\
&= 1 + 7(-i)^2 + 4(-i)^4 + 0(-i)^6 - 9 - 4(-i)^2 - 8(-i)^4 - 8(-i)^6 \\
&= -7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(3,1) &= f(0,0) + f(1,0)\omega_x^3 + f(2,0)\omega_x^6 + f(3,0)\omega_x^9 + \\
&\quad f(0,1)\omega_y + f(1,1)\omega_x^3\omega_y + f(2,1)\omega_x^6\omega_y + f(3,1)\omega_x^9\omega_y \\
&= 1 + 7(-i)^3 + 4(-i)^6 + 0(-i)^9 - 9 - 4(-i)^3 - 8(-i)^6 - 8(-i)^9 \\
&= -4 + 11i
\end{aligned}$$

44. 请计算对下列复数矩阵进行傅立叶逆变换后的变换结果（缩放结果， i 是虚数单位）。

41	$-2-3i$	3	$-2+3i$
-17	$-4-11i$	-7	$-4+11i$

deepseek的解释:

- $F(k_x, k_y)$ 是频域矩阵的元素。
- $f(x, y)$ 是恢复的时域矩阵的元素。
- M 和 N 分别是矩阵的行数和列数。
- $\omega_x = e^{2\pi i/M}$ 和 $\omega_y = e^{2\pi i/N}$ 是旋转因子。

在本题中, $M = 4$ 和 $N = 2$, 因此 $\omega_x = e^{2\pi i/4} = i$, $\omega_y = e^{2\pi i/2} = -1$ 。

2. 计算过程

我们需要计算每个 $f(x, y)$ 的值。以 $f(0, 0)$ 为例, 计算过程如下:

$$f(0, 0) = \frac{1}{4 \cdot 2} (F(0, 0) + F(1, 0) + F(2, 0) + F(3, 0) + F(0, 1) + F(1, 1) + F(2, 1) + F(3, 1))$$

将频域矩阵的元素代入:

$$f(0, 0) = \frac{1}{8} (41 + (-2 - 3i) + 3 + (-2 + 3i) + (-17) + (-4 - 11i) + (-7) + (-4 + 11i))$$

简化计算:

$$f(0, 0) = \frac{1}{8} (41 - 2 - 3i + 3 - 2 + 3i - 17 - 4 - 11i - 7 - 4 + 11i)$$

$$f(0, 0) = \frac{1}{8} (41 - 2 + 3 - 2 - 17 - 4 - 7 - 4) = \frac{1}{8} \times 8 = 1$$

45. 某研究者在对一个 4×4 实数矩阵进行傅立叶变换时, 将变换结果记录在一张草稿纸上。半小时后, 由于意外, 有部分数据受到了污损, 请根据傅立叶变换的性质帮这位研究者恢复被污损的数据, 并说明依据。其中, 受到污损后数据如下 (i 是虚数单位)。

67	$-5-8i$	-5	$-5+8i$
$-4-19i$	$10-9i$	$-11i$	
-11	$-7-4i$	-3	
	$-10-7i$		

$$F(M - u, N - v) = \text{conj}(F(u, v))$$

参考

2. 某研究者在对一个实数矩阵进行傅立叶变换时，将变换结果记录在一张草稿纸上。半小时后，由于意外，有部分数据受到了污损，请根据傅立叶变换的性质帮这位研究者恢复被污损的数据，并说明依据。其中，受到污损后的数据如下（ i 是虚数单位）。

-1	1+2i	3+4i	5		
1+2i	3+5i	7+9i	11+17i	23-29i	11-17i
3+4i	5+8i	11+14i	23+29i	19-24i	9-14i
5	7+11i	15+19i	35	15-19i	7-11i
	9+14i	19+24i			
	11+17i	23+29i			

【解答】根据二维离散傅立叶变换的性质，如果 $f(x, y)$ 是实数函数，则 $F(M-u, N-v) = \text{conj}(F(u, v))$ 。由此可得，恢复后的数据如下。

-1	1+2i	3+4i	5	3-4i	1-2i
1+2i	3+5i	7+9i	11+17i	23-29i	11-17i
3+4i	5+8i	11+14i	23+29i	19-24i	9-14i
5	7+11i	15+19i	35	15-19i	7-11i
3-4i	9+14i	19+24i	23-29i	11-14i	5-8i
1-2i	11+17i	23+29i	11-17i	7-9i	3-5i

47. 请给出对下列灰度图像采用 3×3 模板进行中值滤波（中值模糊）后的结果（边界外元素当作边界元素处理）。

51	27	44
99	74	58
71	97	71

课本 220、221 页

参考：

1、请给出对下列灰度图像采用 3×3 模板进行中值滤波（中值模糊）后的结果（边界外元素当作边界元素处理）。

5	2	4
7	9	1

【解答】

$$\begin{aligned}
 g(0,0) &= \text{Med}\{f(-1,-1), f(0,-1), f(1,-1), f(-1,0), f(0,0), f(1,0), \\
 &\quad f(-1,1), f(0,1), f(1,1)\} \\
 &= \text{Med}\{f(0,0), f(0,0), f(1,0), f(0,0), f(0,0), f(1,0), \\
 &\quad f(0,1), f(0,1), f(1,1)\} \\
 &= \text{Med}\{5, 5, 2, 5, 5, 2, 7, 7, 9\} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

	$x=-1$		$x=3$		
$y=1$	5	5	2	4	4
	5	5	2	4	4
	7	7	9	1	1
$y=2$	7	7	9	1	1

$$\begin{aligned}
 g(1,0) &= \text{Med}\{f(0,-1), f(1,-1), f(2,-1), f(0,0), f(1,0), f(2,0), \\
 &\quad f(0,1), f(1,1), f(2,1)\} \\
 &= \text{Med}\{f(0,0), f(1,0), f(2,0), f(0,0), f(1,0), f(2,0), \\
 &\quad f(0,1), f(1,1), f(2,1)\} \\
 &= \text{Med}\{5, 2, 4, 5, 2, 4, 7, 9, 1\} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(2,0) &= \text{Med}\{f(1,-1), f(2,-1), f(3,-1), f(1,0), f(2,0), f(3,0), \\
 &\quad f(1,1), f(2,1), f(3,1)\} \\
 &= \text{Med}\{f(1,0), f(2,0), f(2,0), f(1,0), f(2,0), f(2,0), \\
 &\quad f(1,1), f(2,1), f(2,1)\} \\
 &= \text{Med}\{2, 4, 4, 2, 4, 4, 9, 1, 1\} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(0,1) &= \text{Med}\{f(-1,0), f(0,0), f(1,0), f(-1,1), f(0,1), f(1,1), \\
&\quad f(-1,2), f(0,2), f(1,2)\} \\
&= \text{Med}\{f(0,0), f(0,0), f(1,0), f(0,1), f(0,1), f(1,1), \\
&\quad f(0,1), f(0,1), f(1,1)\} \\
&= \text{Med}\{5, 5, 2, 7, 7, 9, 7, 7, 9\} \\
&= 7 \\
g(1,1) &= \text{Med}\{f(0,0), f(1,0), f(2,0), f(0,1), f(1,1), f(2,1), \\
&\quad f(0,2), f(1,2), f(2,2)\} \\
&= \text{Med}\{f(0,0), f(1,0), f(2,0), f(0,1), f(1,1), f(2,1), \\
&\quad f(0,1), f(1,1), f(2,1)\} \\
&= \text{Med}\{5, 2, 4, 7, 9, 1, 7, 9, 1\} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(2,1) &= \text{Med}\{f(1,0), f(2,0), f(3,0), f(1,1), f(2,1), f(3,1), \\
&\quad f(1,2), f(2,2), f(3,2)\} \\
&= \text{Med}\{f(1,0), f(2,0), f(2,0), f(1,1), f(2,1), f(2,1), \\
&\quad f(1,1), f(2,1), f(2,1)\} \\
&= \text{Med}\{2, 4, 4, 9, 1, 1, 9, 1, 1\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

由此可知，中值滤波（中值模糊）后的结果为

5	4	4
7	5	2

48. 请给出对下列灰度图像采用 3×3 模板进行简单模糊（均值模糊）后的结果（边界外元素当作边界元素处理）。

51	27	44
99	74	58
62	84	45

课本 218 页

将图像上每个像素用它近旁（包括它本身）的 9 个像素的平均值取代

deepseek的解答：

给定的图像矩阵为：

```
|51|27|44|  
|99|74|58|  
|62|84|45|
```

我们将对每个像素应用3×3的均值模糊。以下是计算过程：

1. 中心像素 (74)

- 邻居像素: 51, 27, 44, 99, 74, 58, 62, 84, 45
- 平均值: $(51 + 27 + 44 + 99 + 74 + 58 + 62 + 84 + 45) / 9 = 544 / 9 \approx 60.44$

2. 边界像素

对于边界像素，我们将复制边界外的像素值。例如：

- 左上角像素 (51):
 - 邻居像素: 51, 51, 27, 51, 51, 27, 99, 99, 74
 - 平均值: $(51 + 51 + 27 + 51 + 51 + 27 + 99 + 99 + 74) / 9 = 530 / 9 \approx 58.89$
- 顶部中间像素 (27):
 - 邻居像素: 51, 27, 44, 51, 27, 44, 99, 74, 58
 - 平均值: $(51 + 27 + 44 + 51 + 27 + 44 + 99 + 74 + 58) / 9 = 475 / 9 \approx 52.78$

- 右上角像素 (44):
 - 邻居像素: 27, 44, 44, 74, 58, 58, 84, 45, 45
 - 平均值: $(27 + 44 + 44 + 74 + 58 + 58 + 84 + 45 + 45) / 9 = 479 / 9 \approx 53.22$
- 左侧中间像素 (99):
 - 邻居像素: 51, 51, 27, 99, 99, 74, 62, 62, 84
 - 平均值: $(51 + 51 + 27 + 99 + 99 + 74 + 62 + 62 + 84) / 9 = 609 / 9 \approx 67.67$
- 右侧中间像素 (58):
 - 邻居像素: 27, 44, 44, 74, 58, 58, 84, 45, 45
 - 平均值: $(27 + 44 + 44 + 74 + 58 + 58 + 84 + 45 + 45) / 9 = 479 / 9 \approx 53.22$
- 左下角像素 (62):
 - 邻居像素: 99, 99, 74, 62, 62, 84, 62, 62, 84
 - 平均值: $(99 + 99 + 74 + 62 + 62 + 84 + 62 + 62 + 84) / 9 = 688 / 9 \approx 76.44$
- 底部中间像素 (84):
 - 邻居像素: 99, 74, 58, 62, 84, 45, 62, 84, 45
 - 平均值: $(99 + 74 + 58 + 62 + 84 + 45 + 62 + 84 + 45) / 9 = 613 / 9 \approx 68.11$
- 右下角像素 (45):
 - 邻居像素: 74, 58, 58, 84, 45, 45, 84, 45, 45
 - 平均值: $(74 + 58 + 58 + 84 + 45 + 45 + 84 + 45 + 45) / 9 = 538 / 9 \approx 59.78$

模糊后的图像矩阵

将上述计算得到的平均值四舍五入到最接近的整数，模糊后的图像矩阵为：

```
|59|53|53|
|68|60|53|
|76|68|60|
```

57. 请用线段方式绘制下列 8 灰度级图像的灰度直方图。

1	3	6	4	1	4
6	6	2	0	1	1
1	3	1	3	3	6
3	4	7	4	6	1
4	6	5	4	6	7

课本 240、241页

参考：

1、请用线段方式绘制下列8灰度级图像的灰度直方图。

1	3	2	7
2	4	0	2
1	2	3	5
2	4	4	2

【解答】

因为根据图像数据，灰度值为0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7的像素的频度分别是1, 2, 6, 2, 3, 1, 0, 1，因此在灰度刻度的0~7处分别作一条以该灰度值对应的频度值为长度的直线即可完成该图像的灰度直方图。

